מטלת מנחה 16

## שאלה 1

### סעיף א

| קיום אקסיומות | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| המחשה i | כן | כן | כן | כן | כן |
| המחשה ii | כן | כן | כן | כן | כן |
| המחשה iii | כן | כן | כן | כן | כן |
| המחשה iv | כן | כן | כן | כן | לא |
| המחשה v | כן | כן | כן | לא | כן |

ההמחשות i, ii, iii מהוות מודלים של המערכת.

ההמחשות iv,v לא מהוות מודלים של המערכת.

### סעיף ב

טענה: המערכת חסרת סתירה

הוכחה: ההמחשות i,ii,iii מהוות מודלים של המערכת.

טענה: המערכת קטגורית

הפרכה:

האקסיומה "קיים לכל היותר ישר אחד עליו חלות יותר משלוש נקודות" מתקיימת במודל iii ואינה מתקיימת במודל i.

### סעיף ג

טענה: אקסיומה 4 אינה נובעת מן האקסיומות האחרות וגם אקסיומה 5 אינה נובעת מן האקסיומות האחרות.

הוכחה:

מודל v מקיים את כל האקסיומות חוץ מאקסיומה 4.

מודל iv מקיים את כל האקסיומות חוץ מאקסיומה 5.

### 

### סעיף ד

טענה: בכל מודל של המערכת מתקיימת האקסיומה "לא כל הנקודות נמצאות על ישר אחד"

הוכחה: יהי מודל במערכת ונניח שמתקיימת בו האקסיומה "כל הנקודות נמצאות על ישר אחד"

נסמן באת הישר עליו נמצאות הנקודות.

מאקסיומה 1 נובע כי קיימים עוד שלושה ישרים במודל. נסמנם ב.

מאקסיומה 3 נובע כי על כל ישר נמצאות לפחות שתי נקודות שונות. נסמן ב את הנקודות הנמצאות על הישר . מאחר וכל הנקודות נמצאות על מתקיים גם .

לכן הישרים נפגשים בשתי נקודות שונות , זאת בסתירה לאקסיומה 4!

## שאלה 2

מערכת האקסיומות:

א. יש בדיוק שלוש נקודות

ב. קיימים שני ישרים שונים ושתי נקודות שונות כך ש וגם .

ג. על כל ישר לפחות שתי נקודות

ד. לכל ישר ולכל נקודה שאינה על קיים ישר אשר נמצאת עליו ואין לו נקודות משותפות עם הישר .

לשם נוחות, בשאלה זו אסמן את שלוש הנקודות במערכת ב כמסומן במערכת האקסיומות.

ואת שני הישרים שקיומם מובטח מאקסיומה ב ב.

טענה: המערכת בעלת סתירה

הוכחה:

ראשית אוכיח כי .

נניח בשלילה לה"כ

לכן מאקסיומה ד נובע כי קיים יש נוסף שנסמנו ב, כך שאין לו נקודות משותפות עם   
 לכן .

מאקסיומה ג נובע כי קיימת נקודה נוספת אחת לפחות על , ומאחר ו הדבר מבטיח את

קיומה של נקודה נוספת אחת לפחות, זאת בסתירה לאקסיומה א!

מאקסיומה א נובע כי אלו שלוש הנקודות היחידות, ולכן .

כמו כן, לא קיים ישר נוסף:

נניח כי קיים ישר נוסף השונה מ (כלומר: )

לכן קיימת נקודה, נניח לה"כ , שאינה על הישר .

כמו כן, מאקסיומה ג נובע כי קיימות לפחות 2 נק' על - ואלה בוודאות כי לא קיימות נקודות נוספות.

לכן עבור הנקודה והישר , מאקסיומה ד נובע כי קיים ישר נוסף כך ש ו.  
לכן הנקודה היחידה על הישר (שכן לא קיימות נקודות נוספות), זאת בסתירה לאקסיומה ג!

לכן קיים ישר אחד בדיוק, בסתירה לאקסיומה ב!

## שאלה 3

מערכת האקסיומות: ארבעת האקסיומות של החבורה

הערה: מספור האקסיומות 1,2,3,4 מתייחס לתכונות, הסגירות, קיום הנגדיים וקיום הניטרליים בחבורה בהתאמה.

### סעיף א

טענה: המערכת חסרת סתירה

הוכחה: מהווה מודל מוגדר היטב המקיים את כל האקסיומות:

קיום אקסיומה 1 מובטח מסגירות חיבור שלמים.

קיום אקסיומה 2 מובטח מקיבוציות חיבור שלמים.

קיום אקסיומה 3 מובטח - הניטרלי ביחס לפעולה הבינארית הוא .

קיום אקסיומה 4 מובטח - לכל מתקיים . כמו כן, מסגירות כפל שלמים.

### סעיף ב

טענה: אקסיומה 2 אינה נובעת מן האקסיומות האחרות

הוכחה: הפעולה הבינארית המוגדרת מטה מהווה מודל המקיים את כל אקסיומות החבורה למעט אקסיומה 2.

טבלת הפעולה של :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

מטבלת הפעולה ניתן להסיק כי:

* קיום אקסיומה 1 מובטח - לא קיים איבר בטבלת הפעולה שאינו בקבוצה עליה היא מוגדרת.
* קיום אקסיומה 3 מובטח - הוא הניטרלי.
* קיום אקסיומה 4 מובטח - בכל שורה וטור מופיע .

עם זאת, אקסיומה 2 אינה מתקיימת:

האיברים ו- שונים לפי הגדרת הפעולה, ולכן ואקסיומה 2 אינה מתקיימת.

### סעיף ג

טענה: אקסיומה 4 אינה נובעת מן האקסיומות האחרות

הוכחה: הפעולה הבינארית היא מודל המקיים את כל האקסיומות למעט אקסיומה 4:

קיום אקסיומה 1 מובטח מסגירות כפל רציונליים.

קיום אקסיומה 2 מובטח מקיבוציות כפל רציונליים.

אקסיומה 3 מתקיימת - הניטרלי הוא 1.

ואקסיומה 4 אינה מתקיימת. לכל מתקיים .

### סעיף ד

הוספת אקסיומה 5 למערכת: יש בדיוק 4 איברים בקבוצת החבורה.

טענה: הפעולה הבינארית היא מודל למערכת .

הוכחה: ראשית נכתוב את טבלת הפעולה של :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

מהטבלה ניתן להסיק כי:

* אקסיומה 1 מתקיימת - לא קיים אף איבר בטבלה שאינו שייך לקבוצה .
* אקסיומה 3 מתקיימת - 1 הוא הניטרלי ביחס ל.
* אקסיומה 4 מתקיימת - 1 מופיע בכל שורה ובכל טור.

לא נתבקשתי להוכיח קיבוצית בסעיף זה, אבל ידוע שהיא מתקיימת ב. לכן אקסיומה 2 מתקיימת.

אקסיומה 5 מתקיימת כי ישנם בדיוק ארבעה איברים ב.

לכן הפעולה היא מודל למערכת.

### 

### סעיף ה

טענה: המערכת קטגורית.

הפרכה:

האקסיומה הבאה מתקיימת במודל למערכת שהוצג בסעיף הקודם -

קיים איבר: לכל איבר: (( וגם ) וגם )

(ובמילים: כל איבר הוא הנגדי לעצמו)

אבל במודל להלן האקסיומה לא מתקיימת:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

## שאלה 4

מערכת האקסיומות:

1. יש בדיוק ארבע נקודות
2. כל שתי נקודות נמצאות על ישר יחיד
3. כל ישר מכיל לפחות שתי נקודות שונות
4. לכל ישר ולכל נקודה שאינה על יש ישר יחיד אשר נמצאת עליו ואין לו נקודות משותפות עם .

### סעיף א

טענה: מערכת האקסיומות חסרת סתירה.

הוכחה: הקבוצה מהווה מודל למערכת האקסיומות (הנקודות הן ).

קיום אקסיומה 1 מובטח כי קיימות בדיוק 4 נקודות, והן

קיום אקסיומה 2 מובטח כי לכל נקודה יש ישר משותף עם כל נקודה אחרת במודל. לנקודה , למשל, קיימים ישרים משותפים עם והם בהתאמה. באופן דומה, שאר הנקודות במודל מקיימות את אקסיומה 2.

קיום אקסיומה 3 מובטח כי בכל קבוצת נקודות המהווה ישר יש בדיוק שני איברים.

קיום אקסיומה 4 מובטח כי לכל נקודה וישר שהיא אינה נמצאת עליו אכן קיים ישר יחיד שהיא כן נמצאת עליו ואין לו נקודות משותפות עם הישר ה"מקורי". הנקודה , למשל, לא נמצאת על הישר וקיים ישר נוסף שהנקודה נמצאת עליו ואין לו נקודות משותפות עם. באופן דומה, כל נקודה וישר אחרים במודל מקיימים את אקסיומה 4.

### סעיף ב

טענה: האקסיומה "אין ישר ועליו בדיוק 3 נקודות" נובעת מהמערכת

הוכחה: נניח בשלילה כי קיים ישר ועליו בדיוק 3 נקודות. נניח לה"כ

מאקסיומה 1 נובע כי קיימת נקודה נוספת שנסמנה באות . היא אינה נמצאת על הישר , אחרת היו עליו 4 נקודות ולא 3.

לכן מאקסיומה 4 נובע כי קיים ישר נוסף, נניח , שהנקודה נמצאת עליו, ואין לו נקודות משותפות עם . כלומר - . מאחר ולא קיימות נקודות נוספות, הנקודה היא היחידה הנמצאת על הישר , זאת בסתירה לאקסיומה 3!

### 

### סעיף ג

טענת עזר: הקבוצה מהווה מודל למערכת.

הוכחה:

קיימות בדיוק 4 נקודות - . לכן אקסיומה 1 מתקיימת.

כל הנקודות על ישר אחד, לכן כל שתי נקודות נמצאות על ישר זה ואקסיומה 2 מתקיימת.

הישר היחיד מכיל בדיוק 4 נקודות, שהן יותר מ-2 נקודות. לכן אקסיומה 3 מתקיימת.

אקסיומה 4 נכונה בצורה ריקה.

טענה: המערכת שלמה

הפרכה: האקסיומה "יש בדיוק ישר אחד" אינו נובע מהמערכת, וגם שלילתה אינה נובעת מהמערכת.

הצגתי שני מודלים המספקים את המערכת, כך שאחד מקיים את האקסיומה ואחד לא.

### סעיף ד

הוספת אקסיומה 5 למערכת: לכל שני ישרים יש נקודה משותפת

טענה: המערכת המורחבת חסרת סתירה.

הוכחה: המודל שהצגתי בסעיף ג מהווה מודל גם למערכת המורחבת, כי האקסיומה החדשה נכונה בו בצורה ריקה.

קיום מודל מתמטי למערכת אקסיומות בהכרח מצביע על כך שהיא חסרת סתירה.

טענת עזר: האקסיומה "אין ישר ועליו בדיוק 2 נקודות" נובעת מהמערכת המורחבת

הוכחה: נניח בשלילה כי קיים מודל למערכת כך שקיים וקיימות :

לפי אקסיומה 1 לה"כ

לפי אקסיומה 4 עבור קיים ישר כך ש ואין לו נקודות משותפות עם .

אבל לפי אקסיומה 5 לכל 2 ישרים יש נקודה משותפת!

טענה: המערכת המורחבת קטגורית.

הוכחה:

קיום: המודל שהצגתי בסעיף ג מהווה מודל למערכת, כי האקסיומה החדשה נכונה בו בצורה ריקה.

יחידות (עד כדי שקילות):

יהי מודל כלשהו של המערכת המורחבת.

לפי אקסיומה 1 לה"כ

לפי אקסיומה 2 עבור : ישר במערכת כך ש.

לכן לפי אקסיומה 3, סעיף ב וטענת העזר

אלו הנקודות היחידות במודל ולכן

כמו כן, לכל ישר נוסף שנבחר מתקיים שלה"כ .

לכן לפי אקסיומה 2 עבור : .

זהו הישר היחיד במערכת, בדומה למודל שהוצג בסעיף ג.